Exercices et problèmes

Dans tous les exercices le plan est orienté dans le sens direct.

1 Soit OAB Un triangle isocèle en O.

Montrer qu'il existe deux isométries qui fixent O et qui envoient A en B.

2 Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I le milieu de [CD].

1.Montrer qu'il existe quatre isométries qui transforment le segment [AD] en le segment [BC].

2.Existe-t-il une isométrie qui transforme le triangle BCO en le triangle ADI ?

3 Soit ABCD un rectangle.

On désigne par S_1, S_2 et S_3 les symétries d'axes respectifs (AD), (AB) et (AC).

1. Donner la nature de l'isométrie $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

2. Construire le point E, image de B par $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

3. Caractériser alors $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

4 On considère un triangle ABC isocèle en A et tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ et on désigne par r la rotation de centre A qui envoie B sur C. Soit D, E et F les images respectives de C, D et E par r.

1. Montrer que F est l'image de B par une rotation r' de centre A, que l'on précisera.

2. Soit G le symétrique de A par rapport à D.

A-t-on $S_{(AC)} \circ S_{(AE)} = S_{(AD)} \circ S_{(AG)}$?

5 Soit A, B, C et D des points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.

Montrer qu'il existe deux déplacements f et g qui envoient le segment [AB] sur le segment [CD].

2. Définir f et g dans chacun des cas ci-dessous.

a. La droite (CD) est parallèle à la droite (AB).

b. Les droites (CD) et (AB) sont sécantes.

6 On considère deux cercles isométriques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et O' se coupant en deux points A et B.

1. Montrer qu'il existe une unique rotation de centre A qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$. Préciser son angle.

2. Soit M' l'image par cette rotation d'un point quelconque M du cercle $\mathscr{C}$. Montrer que les points M, B et M' sont alignés.

7 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $AB < AC$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. Soit E le milieu du segment $[BC]$ et P le point du segment $[AC]$ tel que $AB = CP$. La droite (OE) coupe $\mathscr{C}$ en I et J tels que J et A soient sur le même arc orienté BC du cercle $\mathscr{C}$.

1. a. Faire une figure.

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

c. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $MB < MC$.

2. a. Justifier qu'il existe une rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Déterminer son angle.

b. Démontrer que le centre de R est un point de $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

c. Quelle est la nature du triangle AIP ?

8 On considère un carré ABCD de sens direct et de centre I tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au carré ABCD.

Soit R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ et $f = T \circ R$.

1. Déterminer $f(D)$ et $f(A)$.

2. Identifier f.

9 Soit un parallélogramme ABCD.

1. Préciser la nature des transformations ci-dessous.

a. $f = S_{(AB)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CB)}$.

b. $g = S_{(AB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CB)} \circ S_{(CD)}$.

c. $h = S_{(AB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(CB)}$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de f, g et h lorsque ABCD est un rectangle.

10 Soit un parallélogramme direct ABCD.

On considère le triangle direct IBA rectangle et isocèle en I et les triangles directs ACC' et ADD' rectangles et isocèles en A.